Cuadernos de Economía. Vol. 16 245-264 1988.

La influencia de las externalidades en la economía del bienestar. Dificultades en la aplicabilidad de la solución pigouniana.

José Luis Martín Simón
Departamento de Análisis Económico y Contabilidad
Universidad de Salamanca
Plaza S. Boal, 13 – 37002 Salamanca

La influencia de las externalidades en la economía del bienestar. Dificultades en la aplicabilidad de la solución pigouniana.

RESUMEN

En esta segunda parte correspondiente al enfoque moderno de la influencia de las externalidades en el bienestar económico, tratamos de presentar las dificultades de aplicabilidad de la solución pigouniana de impuestos-subsidios.

Los inconvenientes que ocasiona la reciprocidad de los efectos externos y las dificultades de información fueron problemas abordados por Davis y Whiston, por Wellisz y por Hurwicz, principalmente, llegándose a un tipo de información descentralizada en la que la "tercera parte" (la Autoridad) no tendría intervención alguna.

The Influence of Externalities in the Economy of Welfare. Difficulties in the Application of the Pigounian Solution.

ABSTRACT

In this second part corresponding to the influence of externalities on economic welfare, we intend to present the difficulties in the application of the pigounian solution to taxes-subsidies.

The inconveniences caused by the reciprocity of external effects and the difficulty in information were problems principally investigated by Davis and Whinston, and by Wellisz and Hurwicz. Theis studies arrived at a type of decentralized information in which "the third part" (The Authority) would not have any intervention at all.

La influencia de las externalidades en la economía del bienestar. Dificultades en la aplicabilidad de la solución pigouniana.

0.– Introducción

Analizábamos en otra parte de nuestro trabajo, la posibilidad de acuerdos entre dañantes y perjudicados para resolver los efectos de las externalidades (de las deseconomías externas). Pero también era posible utilizar la via imperativa, estableciendo un procedimiento coactivo de impuestos-subsidios que alcanzase el beneficio óptimo para la comunidad. La aplicación de esta solución presenta a veces serias dificultades de información e incertidumbre. Davis y Whinston trataron de resolver estos problemas como veremos seguidamente.

1.– El análisis de Davis y Whinston

Davis y Whinston[1] admitían la divergencia entre beneficios sociales y privados por la presencia de las externalidades ($\partial C_1 / \partial X_2 \neq 0$ y $\partial C_2 / \partial X_1 \neq 0$). Analizan éstas bajo dos modalidades: economías y deseconomías externas separables y economías y deseconomías externas no separables, pudiéndose dar en este segundo caso la reciprocidad y la no reciprocidad.

Caso de separabilidad. En este primer caso, las funciones de coste se escribían[2]:

$$C_1 = f_1(x_1) + g_1(x_2)$$

$$C_2 = f_2(x_2) + g_2(x_1)$$

1. Davis, O.A. y Whinston, A.: "Externalities, Welfare and the Theory of Games", en Journal of Political Economy, junio 1962, págs. 241 a 262; "The Economics of Complex Systems: The Case of Municipal Zoning", en Kyklos, septiembre 1964, págs. 419 a 446; y "On Externalities, Information and the Government-Assisted Invisible Hand", en Económica, agosto 1966, págs. 303 a 318.

2. Una exposición sencilla de estos casos la recoge Jimenez Groh en "Eficiencia, impuestos y subsidios", Hacienda Pública Española, Instituto de Estudios Fiscales, nº 8, 1971, págs. 103 a 121.

Entonces, el coste marginal de cada empresa, $\frac{\partial t_1}{\partial x_1}$, dependerá únicamente de su volumen de producción, x_1, y no de la producción de la otra empresa, x_2, cosa que no sucede al hallar el beneficio, toda vez que puede ser afectado por la producción de su rival, en concreto por su $\frac{\partial g_1}{\partial x_2}$. Por este motivo, las variaciones de la producción de una de las empresas desplazan verticalmente la curva de costes totales de la otra, sin que ello suponga alterar el volumen de producción del máximo beneficio, de ahí que el impacto sea intramarginal.

La maximización del beneficio individual de cada empresa, vendría dado por

$$\max. B_1 = px_1 - [f_1(x_1) + g_1(x_2)]$$

$$\max. B_2 = px_2 - [f_2(x_2) + g_2(x_1)]$$

es decir,

$$P = \frac{\partial t_1}{\partial x_1} \quad \text{y} \quad P = \frac{\partial t_2}{\partial x_2}$$

cuyas soluciones serían x_1' y x_2'.

Las condiciones necesarias para este máximo bienestar social serán

$$P = \frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \quad \text{y} \quad P = \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$$

y sus soluciones x_1^* y x_2^*, diferentes a x_1' y x_2', respectivamente, si $\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0$ y $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \neq 0$.

Llamando t_1 y t_2 a los subsidios e impuestos unitarios, la maximización del beneficio social de las dos empresas vendría determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\max. B_1 = px_1 - [f_1(x_1) + g_1(x_2)] - t_1 x_1$$

$$\max. B_2 = px_2 - [f_2(x_2) + g_2(x_1)] - t_2 x_2$$

y las condiciones necesarias

$$P = \frac{\partial t_1}{\partial x_1} + t_1 \quad \text{y} \quad P = \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + t_2$$

Estas condiciones serán iguales a las anteriores únicamente en los casos de que

$$t_1 = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \text{ cuando } x_1 = x_1^*$$

$$t_2 = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \text{ cuando } x_2 = x_2^*$$

Así pues, si la empresa crea economías externas deberá recibir una subvención, o sea t_1 y t_2 serían negativos cuando lo fuesen $\frac{\partial g_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial g_1}{\partial x_2}$; si, por el contrario, origina deseconomías externas deberá gravarse, y entonces $t_1 > 0$ y $t_2 > 0$, cuando $\frac{\partial g_2}{\partial x_1} > 0$ y $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} > 0$.

En este primer caso no se presenta dificultad alguna en la obtención de t_1 y t_2.

Caso de no separabilidad. Tal como hemos visto antes, pueden darse casos de reciprocidad y no reciprocidad, según que la producción de cada empresa genere externalidades a la otra o sólo sea la producción de una de ellas la que origine externalidades.

En el supuesto de no separabilidad y no reciprocidad[3], las funciones de coste serían

$$C_1 = C_1(x_1, x_2)$$

$$C_2 = C_2(x_2)$$

Como el coste de la empresa 2 depende exclusivamente de su nivel de producción, este vendría determinado y será invariable al maximizar dicha empresa su beneficio (no le afecta a x_1) y esto hará que suceda lo

3. Supuesto que Davis y Whinston lo tratan en nota a pié de página.

mismo en el nivel de producción de la empresa 1[4].

En supuesto de no separabilidad y reciprocidad, las funciones de coste serían

$$C_1 = C_1(x_1, x_2)$$

$$C_2 = C_2(x_1, x_2)$$

donde, al no existir la separabilidad, los costes marginales de una empresa dependen no solo de su nivel de producción sino también del de la otra empresa.

Para el establecimiento por la autoridad del sistema impuestos-subsidios, empecemos suponiendo que cada una de las empresas considera un parámetro el volumen de producción de la otra; es decir, las variaciones conjeturales, $\frac{dx_2}{dx_1}$ y $\frac{dx_1}{dx_2}$, son nulas.

En este caso, la maximización del beneficio de cada empresa, vendrá dado por unos volúmenes de producción resultado de las ecuaciones

$$P = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{\partial C_2}{\partial x_2}$$

A este equilibrio se llegaría por infinidad de ajustes debidos a las reacciones y contrarreacciones de ambas empresas, lo que dificultaría, en gran manera, la adopción de la solución impuestos-subsidios.

Para paliar tal inconveniente, Davis y Whinston distinguieron dos supuestos que llevarían al equilibrio. El primero, que podríamos incorporarlo a la via contractual, pues se trata de que cada empresa anuncia a la otra su proyecto de nivel de producción, pero sin producir hasta que los volúmenes de producción sean los de equilibrio. Pero, se preguntan Davis y Whinston, ¿por qué no comunicarse sobre sus funciones de coste?, ¿por qué no intentar una unión que maximice el beneficio conjunto para eludir la interferencia estatal?.

El segundo tipo de supuesto consiste en que las empresas alcancen los niveles de producción a largo plazo, basándose en las cantidades producidas en los años anteriores y considerando cada empresa que el volumen de producción de la otra no va a cambiar. Pero, ¿qué sucederá en

4. Puede observarse que este caso pudiera complicarse si la empresa 1 originara una economía o deseconomía externa de tipo separable sobre la empresa 2, pero aún en este supuesto los impuestos y subsidios estarían determinados.

el período siguiente?[5].

Por tanto, en el supuesto de economías y deseconomías externas recíprocas y no separables aparece el problema de la indeterminación de soluciones (salvo casos muy especiales), cuando se trata de averiguar las cantidades producidas en caso de maximización privada de los beneficios de las empresas. Ello hará muy difícil establecer unos impuestos o subsidios sobre las cantidades que se van a producir entre los diversos períodos.

Así pues, la conclusión a la que llegan estos autores es, por un lado, la posibilidad a nivel conceptual para aplicar la solución clásica de impuestos-subsidios para el caso de funciones separables (y no separables que sean no recíprocas), aunque con dificultades por la información que necesitaría la autoridad para determinar las producciones óptimas de ambas empresas; por otro, la imposibilidad de dicha solución en el supuesto de no separabilidad y reciprocidad. Es la existencia de reciprocidad lo que, a juicio de Mishan, crea las dificultades. "El villano de la trama es, en resumen, la interdependencia de los efectos externos"[6].

No deseamos finalizar este análisis sin una breve referencia a la relación que Davis y Whinston hacen de los anteriores argumentos con la teoría de los juegos (como ya lo anuncian en el título de su trabajo).

Si en vez de casos contínuos se presentaran casos discretos se llegaría a las mismas conclusiones en términos de la teoría de los juegos. La matriz de pagos, que representa los beneficios para varias combinaciones de outputs (estrategias) de dos empresas, sería

$$\begin{array}{rc} & \text{Empresa 2} \\ & j: 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; n \\ \text{Empresa 1 } i: \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} \\ (a_{ij}\,;\,b_{ij}) \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Lo mismo sucedería cuando una de las empresas actúa en una posición de independencia y la otra en una posición de dependencia, de forma que la primera espera que la segunda ajuste su nivel de producción a las variaciones del suyo propio. En este caso, $\frac{dx_1}{dx_2} = 0$ y las condiciones del máximo serían

$$p = \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \qquad \text{y} \qquad p = \frac{\partial c_2}{\partial x_2}$$

pero para llegar a este equilibrio es necesario que la primera empresa conozca las funciones de costes de la segunda.

6. "Economía del Bienestar", pág. 171 (Ed. Rialp, 1969).

donde a_{ij} y b_{ij} son, respectivamente, el beneficio de la primera y segunda empresa, cuando toman las estrategias i y j.

Ahora bien, según sean separables o no separables las economías y deseconomías externas podrán relacionarse, respectivamente, con la teoría de los juegos de dominio o sin dominio. En el primer caso, existirán una fina y una columna dominante, puesto que cada una de las empresas tendrá un volumen de producción que le proporcionará los mayores beneficios para todas las estrategias adoptadas por la otra empresa[7]. En el segundo caso, economías y deseconomías externas no separables, aparece la interdependencia de las producciones de ambas empresas para conseguir el máximo beneficio. Por tanto, no existirá dominio ni, por ende, fila-columna de dominio. El equilibrio estará indeterminado, presentándose las mismas dificultades que las correspondientes al establecimiento de impuestos-subsidios en casos contínuos[8].

Como es obvio, el establecimiento del sistema impuestos-subsidios requiere una información para que la autoridad pueda ponerlo en práctica. La autoridad central deberá conocer las funciones de coste de las dos empresas, los cambios en los precios de los factores y del producto, así como las modificaciones en la tecnología; y, en caso de economías y deseconomías externas no separables, deberá asimismo conocer las reglas de conducta de ambas empresas a fin de prever cuales serán sus reacciones[9]. Este obstáculo informativo hace que se tienda a la descentralización.

2.— La crítica de Wellisz

La imposibilidad práctica del establecimiento de la solución pigou-

7. Davis y Whinston presentan como ejemplo de una matriz de beneficios, la siguiente

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Empresa 2} \\ & & \begin{array}{cc} Q_1 & \quad Q_2 \end{array} \\ \text{Empresa 1} & \begin{array}{c} R_1 \\ \\ R_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (0{,}9;0{,}9) & (0;1) \\ & \\ (1;0) & (0{,}1;0{,}1) \end{array}\right] \end{array}$$

la fila R_2 es dominante para la empresa 1, pues $1 > 0{,}9$ y $0{,}1 > 0$, y la columna Q_2 es dominante para la empresa 2, ya que $1 > 0{,}9$ y $0{,}1 > 0$. La solución no-cooperativa del juego es R_2Q_2 que alcanza un beneficio de 0,1 para cada empresa. La maximización del beneficio social de las dos empresas se obtiene con la solución R_1Q_1, que supone un beneficio de 0,9 para cada una de ellas.

8. Métodos para resolver aproximadamente este caso serían: la solución de "maxmin", la solución mixta (basada en probabilidades subjetivas), la solución basada en las "restricciones parciales" impuestas por la autoridad para conseguir una fila-columna dominante, etc. De todos modos, Davis y Whinston afirman la inexistencia de un método apriorístico para resolver este segundo caso.

9. Jimenez Groh: "Eficiencia...", cit., pág. 115.

niana impuestos-subsidios en el caso de no separabilidad y reciprocidad, fué rechazada por Wellisz dos años más tarde[10] al considerar que el análisis de Davis y Whinston se basaba en que las empresas deberían partir de una posición de equilibrio bien definido, condición no necesaria a juicio de aquel autor, pues lo importante es que se internalicen los efectos externos mediante la solución impuestos-subsidios.

De este modo, si tales tasas o subsidios pueden ser arbitrados, cada una de las empresas tenderá a un óptimo paretiano, ya que intentará igualar sus costes marginales (incluido el impuesto) al precio. Y pasa a demostrar analíticamente y en forma gráfica su propuesta, tal como seguidamente veremos.

Se consideran dos empresas en situación competitiva, que tratan de maximizar sus beneficios, es decir

$$P = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{\partial C_2}{\partial x_2}$$

Supongamos que ambas empresas están relacionadas por economías y deseconomías externas recíprocas del tipo no separables, por lo que sus funciones respectivas de coste serían

$$C_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \text{y} \qquad C_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Si llamamos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ a los volúmenes de producción correspondientes a la optimización individual de ambas empresas, tendríamos que la no separabilidad haría que

$$\hat{x}_1 = g_1(x_2) \qquad \text{y} \qquad \hat{x}_2 = g_2(x_1)$$

El proceso de optimización individual puede representarse gráficamente mediante dos curvas (que representan el caso de deseconomías externas recíprocas), cuya intersección origina un punto de equilibrio, M, inestable y diferente al óptimo social que corresponde al punto S (figura 2.1).

Entonces, mediante la aplicación del sistema pigouniano, cambiarán los costes de las empresas, al tiempo que éstas producirán unos niveles que correspondan al punto de equilibrio estable S. Para hallar dichos niveles utilizaremos el procedimiento anterior, si bien teniendo ahora en cuenta que los costes marginales son sociales, es decir

10. Wellisz, S.: "On External Diseconomics and the Government-Assisted Invisible Hand", en Económica, noviembre 1964, págs. 345 a 362.

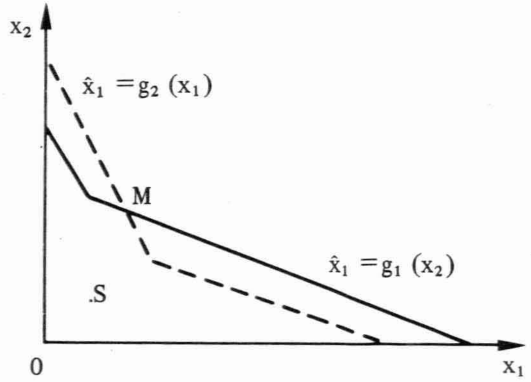

Figura 2.1

$$P = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2}$$

donde $\frac{\partial C_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial C_1}{\partial x_2}$ representan las correspondientes externalidades. Si se aplica un impuesto o subsidio que internalice el factor externo, de forma tal que cada empresa elija de los distintos niveles de producción aquel que corresponda al óptimo social, tendremos que, en el caso de que fuese un impuesto a la empresa 1, su función de costes tendría que recoger ese gravamen, de modo que sería la suma del coste interno de dicha empresa más el coste externo que supondría la actuación de esta empresa 1 sobre la 2 para cualquier valor de x_1; pero, además, la nueva función de costes de la empresa 1 debería ser función de una sola variable: su volumen de producción, x_1.

Por tanto, llamando a la nueva función de costes de la empresa 1, $\hat{C}_1$, tendría que cumplirse

$$\frac{\partial \hat{C}_1(x_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

donde

$$C(x_1, x_2) = C_1(x_1, x_2) + C_2(x_1, x_2)$$

y también

$$\frac{\partial \hat{C}_1}{\partial x_1} = \frac{dC_1}{dx_1}$$

Si se tratase de la empresa 2, sería

$$\frac{\partial \hat{C}_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \hat{C}_2}{\partial x_2} = \frac{d\hat{C}_2}{dx_2}$$

El problema consistirá en encontrar funciones g_1 y g_2, tales que

$$x_2 = g_1(x_1) \quad \text{y} \quad x_1 = g_2(x_2),$$

donde g_1 y g_2 son las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2}{\partial x_1} = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = \frac{\partial C_2}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx_2}$$

simplificando

$$\frac{\partial C_2}{\partial x_1} = \frac{\partial C_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial C_1}{\partial x_2} = \frac{\partial C_2}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx_2}$$

de donde

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial C_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial C_1}{\partial x_2}} = F_1(x_1, x_2) \quad \text{y} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\dfrac{\partial C_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial C_2}{\partial x_1}} = F_2(x_1, x_2)$$

Las soluciones de estas ecuaciones son

$$x_2 = g_1(x_1) \quad \text{y} \quad x_1 = g_2(x_2),$$

siempre que F_1 y F_2 sean contínuas y sus derivadas parciales lo sean también.

Entonces las nuevas funciones de costes serían

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_1\,[x_1, g_1(x_1)] \quad \text{y} \quad \hat{C}_2 = \hat{C}_2\,[x_2, g_2(x_2)]$$

donde g_1 y g_2 representarían la internalización de los efectos externos.

3.—La "nueva propuesta" de Davis y Whinston

La réplica de Davis y Whinston al análisis de Wellisz la harían en un trabajo[11] publicado en 1966, en el que, no solo criticarían la propuesta de este último autor, señalando sus errores, sino que irían más lejos al tratar de presentar un método que pretendiese resolver el problema del esquema clásico, requiriendo una información similar a la de un sistema descentralizado. Veamos estas dos cuestiones.

Davis y Whinston acusan al modelo de Wellisz de requerir una información semejante a la de un esquema centralizado y de otras dificultades "adicionales" referidas a su funcionamiento. Pero es que, además, presenta serios inconvenientes el análisis utilizado. Así, cuando para cumplir las nuevas funciones de coste las dos condiciones (suma de coste interno y externo y función de su propio output) debe ser

$$\frac{d\hat{C}_1}{dx_1} = \frac{\partial C_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

11. "On Externalities...", citado.

y

$$\frac{d\hat{C}_2}{dx_2} = \frac{\partial C_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

pueden surgir serias dificultades tratándose de economías y deseconomías externas recíprocas y no separables, ya que

$$\frac{\partial C_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial C_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad y \quad \frac{\partial C_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial C_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

son funciones de x_1 y x_2; en este caso, la segunda condición queda en entredicho, pues, bien sea x_2 o x_1, se ejercería en ambos términos un dominio restringido muy difícil de determinar.

Después Wellisz llegaba a las expresiones

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial C_2}{\partial x_1} dx_1 = 0 \quad y \quad \frac{\partial C_2}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial C_1}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

que integrándolas obtenía

$$F_1(x_1, x_2) = K_1 \quad y \quad F_2(x_1, x_2) = K_2,$$

siendo K_1 y K_2 constantes de la integración. Sin embargo, lo cierto es que no existe un método general para resolver aquellas ecuaciones diferenciales y tanto K_1 como K_2 pueden tener infinitos valores. Ahora bien, si de $F_1(x_1, x_2) = K_1$ y $F_2(x_1, x_2) = K_2$ pueden obtenerse expresiones tales como

$$x_2 = g_1(x_1) \quad y \quad x_1 = g_2(x_2)$$

es preciso tener en cuenta que tanto g_1 como g_2 dependerán de las constantes de integración K_1 y K_2, y de éstas ¿qué valcr debemos elegir?.

Finalmente, llega a las siguientes nuevas funciones

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_1 \; [x_1, g_1(x_1)]$$

$$C_2 = C_2 \; [x_2, g_2(x_2)]$$

que, recordemos, internalizaban los efectos externos al aparecer g_1 y g_2 (tasas y subsidios) incorporados a estas funciones. Wellisz no cree que se obtengan las funciones $\hat{C}_1$ y $\hat{C}_2$ por manipulaciones de ambas empresas. Será la autoridad quien establezca el esquema impuestos-subsidios y, para ello, deberá conocer las funciones de costes de las dos empresas. De este modo, concluyen Davis y Whinston, la información requerida en el análisis de Wellisz es tan extensa como la correspondiente a un sistema centralizado[12].

Como consecuencia de lo anterior se presenta un problema más. Se refiere a la creencia de que, por estar incorporadas las funciones g_1 y g_2 dentro de las nuevas funciones de costes, cada empresa no se ve afectada por las externalidades y, por tanto, los costes de cada empresa son independientes a las actuaciones de la otra. Para su demostración, Davis y Whinston se valen de un ejemplo[13] que les lleva a las siguientes con-

12. Véase pág. 310.

13. El ejemplo es el siguiente. Supongamos que las funciones de coste son de la forma

$$C_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \qquad \text{y} \qquad C_2(x_1,x_2) = x_1 . x_2$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = x_2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{x_2}$$

resolviendo estas expresiones nos encontraríamos que

$$x_2 = k.e^{x_1} \qquad \text{y} \qquad x_1 = \log x_2 + \log k$$

para obtener el valor de k debemos partir de la maximización del beneficio social

$$\max B = p_1 .x_1 + p_2 .x_2 - (x_1 + x_2) - (x_1 .x_2)$$

cuyas soluciones serán $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$.

Si los precios son, pongamos por caso, $p_1 = 3$ y $p_2 = 4$, entonces las condiciones necesarias serían

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 3 - 1 - x_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial B}{\partial x_2} = 4 - 1 - x_1 = 0$$

de donde $\hat{x}_1 = 3$ y $\hat{x}_2 = 2$.

Ahora podremos hallar el valor apropiado de k, que será

$$2 = k.e^3 \qquad \text{o sea} \qquad k = \frac{2}{e^3}$$

Entonces, si la autoridad considera que las nuevas funciones de costes para las dos empresas deben ser

$$\hat{C}_1(x_1) = x_1 + (\frac{2}{e^3})\, e^{x_1}$$

$$\hat{C}_2(x_2) = (\log x_2 - \log \frac{2}{e^3})\, x_2$$

clusiones: 1) la autoridad debe conocer las funciones de coste, para que, sirviéndose de ellas, pueda obtener las funciones g_1 y g_2; 2) la autoridad debe determinar el valor apropiado de la constante K; 3) las nuevas funciones de costes son equivalentes a las primeras funciones de costes tan solo en el caso de que las variables que originan la externalidad (x_1 y x_2) tomen un valor apropiado.

La segunda cuestión se refería a la "Nueva Propuesta" de Davis y Whinston. Fijan dos objetivos: a) requerir una información equivalente a la de un sistema descentralizado; b) resolver los problemas de incertidumbre que surgen cuando las economías y deseconomías externas son no separables y recíprocas.

El desarrollo del método es el siguiente. Supongamos dos empresas cuyas funciones de costes totales son

$$C_1(x_1, x_2) \qquad \text{y} \qquad C_2(x_1, x_2)$$

La maximización del beneficio de cada empresa vendría dado por

$$\max_{x_1}. B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, x_2)$$

$$\max_{x_2}. B_2 = p.x_2 - C_2(x_1, x_2)$$

con las condiciones necesarias

$$\frac{dB_1}{dx_1} = p - \frac{\partial C_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dB_2}{dx_2} = p - \frac{\partial C_2}{\partial x_2} = 0$$

tendrán ambas empresas que replantear la maximización de su beneficio individual en la forma

$$\max. B_1 = 3x_1 - x_1 - \left(\frac{2}{e^3}\right) e^{x_1}$$

$$\max. B_2 = 4x_2 - \left(\log x_2 - \log \frac{2}{e^3}\right) x_2$$

cuyas condiciones serían

$$\frac{dB_1}{dx_1} = 3 - 1 - \left(\frac{2}{e^3}\right) e^{x_1} = 0$$

$$\frac{dB_2}{dx_2} = 4 - 1 - \log x_2 + \log \frac{2}{e^3} = 0$$

siendo $\hat{x}_1 = 3$ y $\hat{x}_2 = 2$, semejantes a las anteriores soluciones.

Los valores que resultan de resolver estas últimas ecuaciones los denominamos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$. Hasta ahora no hay nada nuevo, pero supongamos que la autoridad permite a cada empresa que selecciones el nivel de producción que desee de la otra y llamamos q_1 y q_2 a los niveles de producción seleccionados por cada empresa. La maximización del beneficio privado se resolvería con las ecuaciones

$$\max_{x_1 q_2} . B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2)$$

$$\max_{x_2 q_1} . B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1)$$

Si suponemos que la solución de las incógnitas x_1, q_2, x_2 y q_1 son $x_1(0)$, $q_2(0)$, $x_2(0)$ y $q_1(0)$, normalmente sería

$$x_1(0) \neq q_1(0) \qquad \text{y} \qquad x_2(0) \neq q_2(0)$$

Sin embargo, la autoridad lo que desea es llegar a los niveles de producción $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, por lo que su deseo es resolver el problema

$$\max_{x_1 q_1 x_2 q_2} . B = p.x_1 + p.x_2 - [C_1(x_1, q_2) + C_2(x_2, q_1)] \qquad [1]$$

sujeto a $x_1 = q_1$ y $x_2 = q_2$.

Introducidas estas restricciones, la expresión del máximo beneficio social se puede descomponer en los dos máximos privados de ambas empresas. Así, la autoridad debe llegar a una etapa t en la que $x_1(t) = q_1(t)$ y $x_2(t) = q_2(t)$.

En el caso de que $x_1(0) \neq q_1(0)$ y $x_2(0) \neq q_2(0)$, las restricciones del problema no se cumplen y la autoridad establecerá impuestos-subsidios sobre la base de la siguiente regla

$$\lambda_i(0) = \partial_i[x_i(0) - q_i(0)] \quad ; \quad i = 1,2$$

donde $\lambda_i(0)$ es el impuesto o subsidic unitario inicial sobre la producción i y ∂_i un parámetro que satisface $0 < \partial_i < 1$. El establecimiento de estos impuestos y subsidios serán arbitrarios al menos en principio, pero convenientes para el comienzo del análisis.

Si la externalidad se concretara en una deseconomía, sería $x_i(0) - q_i(0) > 0$ y, por tanto, $\lambda_i(0) > 0$, ello supondría el pago de un impuesto por parte de la empresa que lo origina. Similarmente, la empresa que sufre tales deseconomías recibirá una compensación. Idéntico razonamiento se podría hacer en el caso de que la externalidad se refiriese a una economía externa.

Establecidos tales impuestos o subsidios, la autoridad informaría a las empresas correspondientes. Ante tal información, las empresas intentarían hallar el problema de su maximización de beneficios en la forma

$$\max_{x_1 q_2} . B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2) - \lambda_1(0).x_1 + \lambda_2(0).q_2$$

$$\max_{x_2 q_1} . B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1) - \lambda_1(0).q_1 + \lambda_2(0).x_2$$

Si los valores de x_1, q_2, x_2 y q_1 son, respectivamente, $x_1(1)$, $q_2(1)$, $x_2(1)$ y $q_1(1)$, y, al mismo tiempo, $x_1(1) \neq q_1(1)$ y $x_2(1) \neq$ $\neq q_2(1)$, la autoridad continuará con este procedimiento iterativo. Supongamos que después de la etapa K-1 ($K > 1$), determina la autoridad que

$$x_1(K\text{-}1) \neq q_1(K\text{-}1)$$

$$x_2(K\text{-}1) \neq q_2(K\text{-}1)$$

entonces alterará las cargas (positivas o negativas) unitarias, conforme a la siguiente regla

$$\lambda_i(K) = \lambda_i(K\text{-}1) + \Delta\lambda_i(K\text{-}1) \; ; i = 1,2$$

de donde

$$\Delta\lambda_i(K\text{-}1) = \alpha_i[x_i(K\text{-}1) - q_i(K\text{-}1)] \; ; i = 1,2$$

siendo α_i un parámetro que satisface $0 < \alpha_i < 1$. Nuevamente las dos empresas calcularán sus beneficios de la forma acostumbrada, es decir

$$\max_{x_1 q_2} . B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2) - \lambda_1(K).x_1 + \lambda_2(K).q_2$$

$$\max_{x_2 q_1} . B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1) - \lambda_1(K).q_1 + \lambda_2(K).x_2$$

Se seguirá este proceso iterativo hasta llegar, como dijimos, a una etapa t en la que

Los valores que resultan de resolver estas últimas ecuaciones los denominamos $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$. Hasta ahora no hay nada nuevo, pero supongamos que la autoridad permite a cada empresa que selecciones el nivel de producción que desee de la otra y llamamos q_1 y q_2 a los niveles de producción seleccionados por cada empresa. La maximización del beneficio privado se resolvería con las ecuaciones

$$\max_{x_1 q_2} .B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2)$$

$$\max_{x_2 q_1} .B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1)$$

Si suponemos que la solución de las incógnitas x_1, q_2, x_2 y q_1 son $x_1(0)$, $q_2(0)$, $x_2(0)$ y $q_1(0)$, normalmente sería

$$x_1(0) \neq q_1(0) \qquad \text{y} \qquad x_2(0) \neq q_2(0)$$

Sin embargo, la autoridad lo que desea es llegar a los niveles de producción $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, por lo que su deseo es resolver el problema

$$\max_{x_1 q_1 x_2 q_2} .B = p.x_1 + p.x_2 - [C_1(x_1, q_2) + C_2(x_2, q_1)] \qquad [1]$$

sujeto a $x_1 = q_1$ y $x_2 = q_2$.

Introducidas estas restricciones, la expresión del máximo beneficio social se puede descomponer en los dos máximos privados de ambas empresas. Así, la autoridad debe llegar a una etapa t en la que $x_1(t) = q_1(t)$ y $x_2(t) = q_2(t)$.

En el caso de que $x_1(0) \neq q_1(0)$ y $x_2(0) \neq q_2(0)$, las restricciones del problema no se cumplen y la autoridad establecerá impuestos-subsidios sobre la base de la siguiente regla

$$\lambda_i(0) = \partial_i[x_i(0) - q_i(0)] \quad ; \quad i = 1,2$$

donde $\lambda_i(0)$ es el impuesto o subsidic unitario inicial sobre la producción i y ∂_i un parámetro que satisface $0 < \partial_i < 1$. El establecimiento de estos impuestos y subsidios serán arbitrarios al menos en principio, pero convenientes para el comienzo del análisis.

Si la externalidad se concretara en una deseconomía, sería $x_i(0) - q_i(0) > 0$ y, por tanto, $\lambda_i(0) > 0$, ello supondría el pago de un impuesto por parte de la empresa que lo origina. Similarmente, la empresa que sufre tales deseconomías recibirá una compensación. Idéntico razonamiento se podría hacer en el caso de que la externalidad se refiriese a una economía externa.

Establecidos tales impuestos o subsidios, la autoridad informaría a las empresas correspondientes. Ante tal información, las empresas intentarían hallar el problema de su maximización de beneficios en la forma

$$\max_{x_1 q_2} . B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2) - \lambda_1(0).x_1 + \lambda_2(0).q_2$$

$$\max_{x_2 q_1} . B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1) - \lambda_1(0).q_1 + \lambda_2(0).x_2$$

Si los valores de x_1, q_2, x_2 y q_1 son, respectivamente, $x_1(1)$, $q_2(1)$, $x_2(1)$ y $q_1(1)$, y, al mismo tiempo, $x_1(1) \neq q_1(1)$ y $x_2(1) \neq$ $\neq q_2(1)$, la autoridad continuará con este procedimiento iterativo. Supongamos que después de la etapa K-1 ($K > 1$), determina la autoridad que

$$x_1(K\text{-}1) \neq q_1(K\text{-}1)$$

$$x_2(K\text{-}1) \neq q_2(K\text{-}1)$$

entonces alterará las cargas (positivas o negativas) unitarias, conforme a la siguiente regla

$$\lambda_i(K) = \lambda_i(K\text{-}1) + \Delta\lambda_i(K\text{-}1) \; ; i = 1,2$$

de donde

$$\Delta\lambda_i(K\text{-}1) = \alpha_i[x_i(K\text{-}1) - q_i(K\text{-}1)] \; ; i = 1,2$$

siendo α_i un parámetro que satisface $0 < \alpha_i < 1$. Nuevamente las dos empresas calcularán sus beneficios de la forma acostumbrada, es decir

$$\max_{x_1 q_2} . B_1 = p.x_1 - C_1(x_1, q_2) - \lambda_1(K).x_1 + \lambda_2(K).q_2$$

$$\max_{x_2 q_1} . B_2 = p.x_2 - C_2(x_2, q_1) - \lambda_1(K).q_1 + \lambda_2(K).x_2$$

Se seguirá este proceso iterativo hasta llegar, como dijimos, a una etapa t en la que

$$x_1(t) = q_1(t) \qquad \text{y} \qquad x_2(t) = q_2(t).$$

En esta etapa las restricciones [1] serán satisfechas y la maximización del beneficio social se habrá logrado con

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \qquad \text{y} \qquad x_2(t) = \hat{x}_2$$

Es decir, se habrá alcanzado el óptimo paretiano. La autoridad en este momento establecerá en ambas empresas los impuestos y pagos previamente calculados.

El hecho de que [1] pudiera ser descompuesto en los máximos beneficios privados de ambas empresas ($\max_{x_1 q_2} B_1$ y $\max_{x_2 q_1} B_2$), hace que cada empresa solo necesite conocer su propia función de costes y el precio del producto. Pero, además, la autoridad no necesita conocer las funciones de costes de las dos empresas. En definitiva, la información requerida es mínima, en el sentido de que equivaldría al supuesto de que el análisis se llevase a cabo sin la existencia de externalidades. Es más, la autoridad no necesitaría conocer las alteraciones de los valores de los parámetros (tales como: el precio del mercado, los precios de los factores y los cambios tecnológicos de las empresas) si, en un momento dado, deseara modificar los impuestos o subsidios, pues las mismas empresas registrarían tales cambios en la elección de q_1 y q_2.

Otra conclusión que puede deducirse es la posibilidad de eliminar el problema de la incertidumbre que crean las economías y deseconomías externas recíprocas y no-separables, al tratar cada empresa de maximizar sus beneficios. La posibilidad de elección por las dos empresas en los valores de las variables q_1 y q_2 permiten que operen en una situación de certidumbre al intentar lograr sus beneficios máximos.

He aquí, pues, las metas que se proponían alcanzar Davis y Whinston en su "Nueva Propuesta": la de una mínima información y la de una máxima certidumbre.

4. — LAS "INTERCOMUNICACIONES" DE HURWICZ

Hurwicz[14] trató de reducir el grado de comunicación entre empresas en presencia de externalidades, eliminando además la intervención de la "tercera parte" (la autoridad). Como acabamos de ver, en la pro-

14. HURWICZ, C.: "On the Concept and Possibilities of Informational Descentralization". American Economic Review, Papers and Proceedings, December 1968. pp. 513-524.

puesta de Davis y Whinston cada una de las partes disponía de su propio nivel de producción (x_1 y x_2) y del que proponía a la otra empresa (q_1 y q_2), con lo que la autoridad asumía nuevas variables que Hurwicz se propone evitar.

El enfoque de Hurwicz obliga a intercomunicaciones entre las empresas, transmitiéndose mútuamente mensajes sobre los efectos externos que experimentan. Supone dos empresas, la 1 y la 2, cuyas funciones de beneficio serían

$$B^1 = f^1(x_1, x_2)$$

$$B^2 = f^2(x_1, x_2)$$

Estas funciones, diferenciables y cóncavas, permiten obtener un beneficio conjunto máximo, cuando la suma de las derivadas parciales se iguala a cero:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial B^1}{\partial x_1} + \frac{\partial B^2}{\partial x_1} = \frac{\partial f^1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f^2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = \frac{\partial B^1}{\partial x_2} + \frac{\partial B^2}{\partial x_2} = \frac{\partial f^1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial f^2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

Seguidamente considera un procedimiento comunicativo entre las empresas, mediante el cual una de ellas, por ejemplo la 1, transmite a la otra, la 2, un mensaje, (que no es más que un número), que llama m_2^1. Si t (tiempo) es la variable de iteración y si tenemcs en cuenta que el mensaje de cada empresa sobre su prcpio volumen de producción lo expresamos por $m_1^1(t)$, se llegaría al siguiente proceso

La empresa 1

– para determinar el mensaje sobre su propio nivel de producción, $m_1^1(t)$, utilizaría la ecuación

$$f_1^1\,[m_1^1(t), m_1^2(t\text{-}1)] + m_1^2(t\text{-}1) = 0$$

donde los subíndices de la función indican la variable respecto a la que se deriva;

– para determinar el mensaje respecto a x_2, utilizaría

$$m_2^1(t) = f_2^1\ [m_1^1(t), m_2^2(t\text{-}1)]$$

La empresa 2

– para determinar el mensaje sobre su propic nivel de producción, $m_2^2(t)$, utilizaría la ecuación

$$m_2^1(t\text{-}1) + f_2^2\ [m_1^1(t\text{-}1), m_2^2(t)] = 0$$

– para determinar el mensaje respecto a la producción de la empresa 1 usaría

$$m_1^2(t) = f_1^2\ [m_1^1(t\text{-}1), m_2^2(t)]$$

Mediante este procedimiento de intercambio de mensajes, referidos al efecto que sobre el beneficio de una empresa ha ejercido el volumen de producción de la otra en la etapa inmediata anterior, obtiene Hurwicz una simplificación en la información sobre la propuesta de Davis y Whinston, sin que, además, la autoridad tenga que intervenir en estas intercomunicaciones. Las economías y deseconomías externas se han valorado por las empresas mediante esa cadena de mensajes, sin necesidad de incurrir en costes adicionales, cuando la autoridad se encontraba con las discrepancias entre x_i y q_i, como variables bajo su control.

A. Camacho[15] ha intentado ampliar el campo de aplicación del proceso de Hurwicz ("greed process"), mediante un nuevo proceso, llamado proceso D, en el que la información es descentralizada y las propiedades óptimo-paretianas corresponden a una clase de entorno más amplia.

* * *

A partir de los años setenta y hasta nuestros días ha aparecido una abundante literatura sobre el tema que venimos desarrollando. En un próximo trabajo nos ocuparemos de la misma, destacando aquellos análisis que han suscitado los mayores comentarios y controversias.

15. Camacho, A.: "Externalities, Optimality and Informationally Descentralized Resource Allocation Processes", en International Economic Review, vol. 11, nº 2, junio 1970.